Funkcje wielu zmiennych

Romuald Lenczewski

Katedra Matematyki
Wydział Matematyki
Politechnika Wrocławska

Marzec 2020

Funkcje wielu zmiennych

Interesują nas obiekty postaci

$$f(x, y)$$

$$f(x, y, z)$$

a ogólniej

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

gdzie zmienne x, y, z oraz $x_1, \ldots, x_n$ należą do $\mathbb{R}$.

Koła otwarte

Koła otwarte

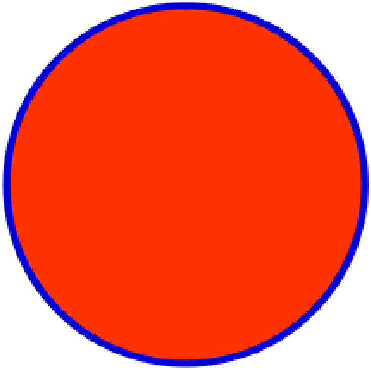
W porównaniu z funkcjami jednej zmiennej $f(x)$, gdzie używamy przedziałów otwartych postaci

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

definiujemy koła otwarte o środku w (x_0, y_0) i promieniu r:

$$\mathcal{O}((x_0, y_0), r) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2\}$$

Koło



Koło otwarte (czerwone) plus brzeg (niebieski) (picture by Richard Giuly, Wikipedia)

Koła

Koło otwarte wokół $(0,0)$:

$$\mathcal{O}((x_0, y_0), r) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < r^2\}$$

(czerwone)

Koło domknięte wokół $(0,0)$:

$$\overline{\mathcal{O}((x_0, y_0), r)} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$$

to koło otwarte (czerwone) plus brzeg (niebieski)

Kule otwarte

Kula otwarta

Kula otwarta o środku w (x_0, y_0, z_0) i promieniu r:

$$\mathcal{O}((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 < r^2\}$$

Kula domknięta o środku w (x_0, y_0, z_0) i promieniu r:

$$\overline{\mathcal{O}((x_0, y_0, z_0), r)} = \{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leqslant r^2\}$$

Podobnie definiujemy kule n-wymiarowe.

Definicje

Chcemy zdefiniować zbiór otwarty, by badać zachowanie funkcji w pobliżu punktu (granice, pochodne, czyli "chodził lisek koło płotu").

1. Podzbiór $A \subset \mathbf{R}^2$ jest *otwarty* jeżeli dla każdego $(x_0, y_0) \in A$ istnieje koło otwarte $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$ takie że $\mathcal{O}((x_0, y_0), r) \subset A$.
2. *Wnętrzem* zbioru A, oznaczanym $\mathrm{Int}A$, jest zbiór punktów $(x_0, y_0) \in A$ takich że istnieje $\mathcal{O}((x_0, y_0), r) \subset A$.
3. *Brzegiem* zbioru A, oznaczanym $\mathrm{Bd}A$, jest zbiór punktów $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ takich że każde koło otwarte $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$ dla $r > 0$ ma niepuste przecięcie z A oraz z dopełnieniem zbioru A, oznaczanym A^c.
4. Zbiór jest *domknięty* gdy zawiera swój brzeg.

Podzbiory $\mathbb{R}^2$

1. linia prosta jest domknięta, równa jest swojemu brzegowi i ma puste wnętrze
2. koło otwarte $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$ jest zbiorem otwartym, równym swojemu wnętrzu i ma pusty brzeg
3. koło domknięte $\overline{\mathcal{O}((x_0, y_0), r)}$ jest zbiorem domkniętym, jego wnętrzem jest koło otwarte $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$, a brzegiem jest okrąg
$$\{(x, y) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$
4. płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ jest zbiorem otwartym i domkniętym, jest równa swojemu wnętrzu i ma pusty brzeg

Obszar

Definicja

Podzbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ jest *obszarem otwartym* jeżeli jest zbiorem otwartym i każe dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną zawartą w zbiorze A. *Obszarem domkniętym* nazywamy obszar otwarty wraz z jego brzegiem.

Funkcja 2 zmiennych

Definicja

Odwzorowanie

$$f : D_f \to \mathbf{R}$$

takie że

$$(x, y) \to f(x, y) \in \mathbb{R},$$

gdzie $D_f \subset \mathbf{R}^2$, nazywa się *funkcją 2 zmiennych* a zbiór D_f nazywa się *dziedziną* funkcji f.

Uwaga

Zazwyczaj przyjmujemy, że D_f to maksymalny zbiór, na którym $f(x, y)$ ma sens. Jest to tzw. *dziedzina naturalna* funkcji f.

Przykład

Przykład

Dziedzina naturalna funkcji

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$$

to

$$D_f = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

Przykład

Przykład

Dziedzina naturalna funkcji

$$g(x, y) = \frac{1}{xy}$$

to

$$D_g = \{(x, y) : x \neq 0, y \neq 0\}$$

czyli $\mathbf{R}^2$ bez osi x oraz osi y.

Wykres

Wykres

Wykresem funkcji $f(x, y)$ nazywamy zbiór punktów

$$G_f := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : \ (x, y) \in D_f \wedge z = f(x, y)\}$$

Poziomice

Poziomice

Poziomicą funkcji f o wartości c nazywamy zbiór punktów

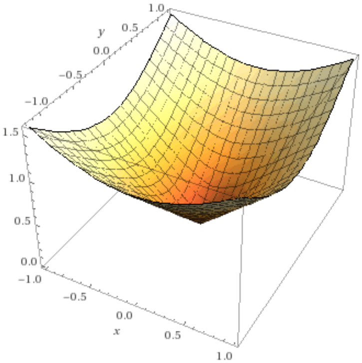
$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

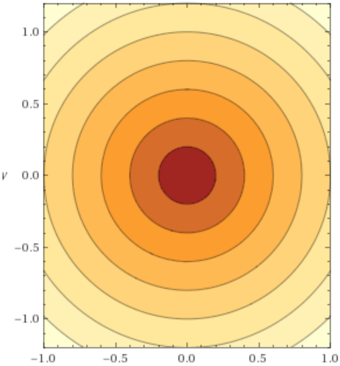
gdzie $c \in \mathbb{R}$.

Uwaga

Rysując kilka poziomic na płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ i podnosząc je do wartości c, otrzymujemy linie, które należą do G_f. To pomaga wyobrazić sobie jak wygląda wykres funkcji.

Przykład



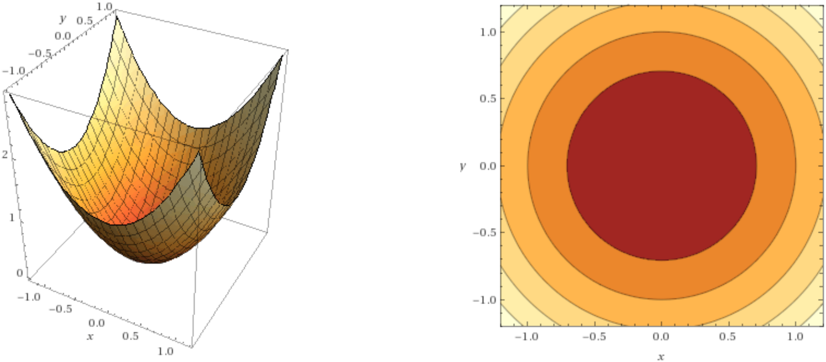


Wykres stożka $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz poziomice

Made with: *WolframAlpha*®

Uwaga: linie na rysunku po lewej stronie to nie są poziomice.

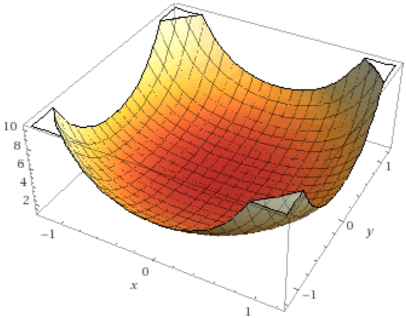
Przykład

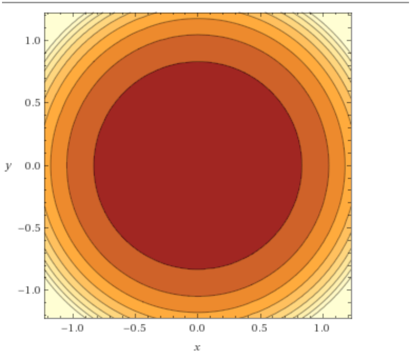


Wykres paraboloidy $f(x, y) = x^2 + y^2$ oraz poziomice

Made with: *WolframAlpha*®

Przykład

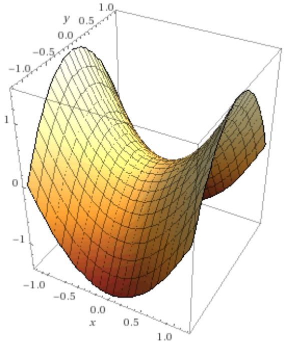


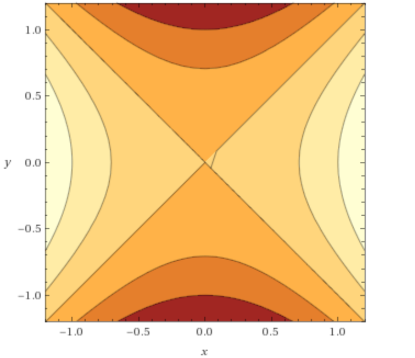


Wykres $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$ oraz poziomice

Made with: *WolframAlpha*®

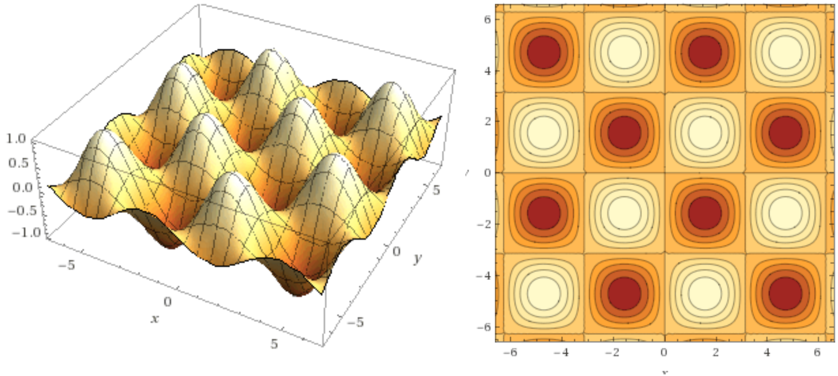
Przykład





Wykres paraboloidy hiperbolicznej $f(x, y) = x^2 - y^2$ oraz poziomice
Made with:WolframAlpha®

Przykład

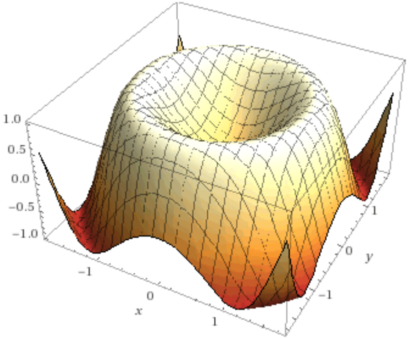


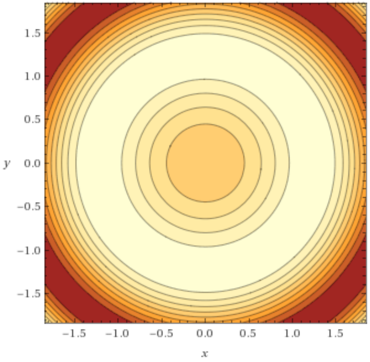
Wykres $f(x, y) = \sin x \sin y$ oraz poziomice

Made with: *WolframAlpha*®

Proszę przetestować poleceniem plot (np. plot sin x sin y)

Przykład





Wykres $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ oraz poziomice

Made with: WolframAlpha®

Powierzchnie

Wykresy funkcji $f(x,y)$ jako powierzchnie

1. $f(x,y) = ax + by + c$ – *płaszczyzna* o wektorze normalnym $(-a,-b,1)$ i punkcie $P = (0,0,c)$,
2. $f(x,y) = a(x^2 + y^2)$ – *paraboloida*,
3. $f(x,y) = a(x^2 - y^2)$ – *paraboloida hiperboliczna* ("siodło"),
4. $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – *górna półsfera* o promieniu R i środku w $(0,0,0)$,
5. $f(x,y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ – *dolna półsfera* o promieniu R i środku w $(0,0,0)$,
6. $f(x,y) = k\sqrt{x^2 + y^2}$, $k \neq 0$ – *powierzchnia stożkowa*,
7. $f(x,y) = ax^2 + b$, gdzie $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ – *walec paraboliczny*,

Przesunięcia

Przesunięta powierzchnia

Czasami mamy do czynienia z powierzchnią przesuniętą względem standardowego położenia, np.

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= 1-\sqrt{2x-x^2+4y-y^2} \\
&= 1-\sqrt{5-((x-1)^2+(y-2)^2)}
\end{aligned}
$$

jest dolną półsferą o promieniu $R=\sqrt{5}$ i środku w $(1,2,1)$.

Definicja

Ciągiem dwuwymiarowym nazywamy odwzorowanie $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}^2$, czyli $f(n) = (x_n, y_n)$. Granicę takiego ciągu definiujemy jako

$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n)$$

Jest to więc para liczb (punkt na płaszczyźnie), do której dążą pary (x_n, y_n). Podobnie definiujemy ciągi trójwymiarowe $f(n) = (x_n, y_n, z_n)$ i ich granice.

Przykłady

Przykłady granic ciągów wielowymiarowych

Obliczenie granic takich ciągów sprowadza się do obliczenia granic zwykłych ciągów, np.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n}, \frac{\sin n}{n}) = (1, 0)$$

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{n}, n \sin\frac{1}{n}, \sqrt[n]{2^n + 3^n}) = (1, 1, 3)$$

Definicja

Jeżeli f jest zdefiniowana w sąsiedztwie punktu (x_0, y_0), czyli w

$$\mathcal{S} = \mathcal{O}((x_0, y_0), r) \backslash \{(x_0, y_0)\}$$

(koło z dziurką w środku), to

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = g$$

gdzie $-\infty \leqslant g \leqslant \infty$ jeżeli dla każdego ciągu $(x_n, y_n) \in S$ takiego, że $\lim_{n \to \infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ oraz $(x_n, y_n) \neq (x_0, y_0)$ mamy

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n) = g$$

Uwaga

Bad news

W definicji granicy musimy otrzymać g niezależnie od sposobu zbliżania się do punktu (x_0, y_0). Nie można więc wybrać ulubionych sposobów zbliżania się do tego punktu, jeżeli granica ma istnieć.

Good news

Twierdzenia arytmetyki granic (granica sumy, iloczynu, ilorazu, etc.) są takie same jak w przypadku funkcji jednej zmiennej

Przykład

Pokażmy, korzystając z definicji, że

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{2x-y}{x^2+y^2} = 0$$

Przechodząc na ciągi, trzeba pokazać, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n-y_n}{x_n^2+y_n^2} = 0$$

dla dowolnego $(x_n, y_n) \to (1,2)$, $(x_n, y_n) \neq (1,2)$. Wtedy

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2x_n-y_n}{x_n^2+y_n^2} &= \frac{2\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n}{(\lim_{n\to\infty} x_n)^2 + (\lim_{n\to\infty} y_n)^2} \\ &= \frac{2\cdot 1 - 2}{1^2+2^2} = 0\end{aligned}$$

z twierdzenia o arytmetyce granic dla ciągów.

Przykład

Pokażmy, korzystając z definicji, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} = 0$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, dla dowolnego ciągu $(x_n, y_n) \to (0,0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 - y_n^3}{x_n - y_n} &= \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + x_n y_n + y_n^2) \\ &= 0^2 + 0 \cdot 0 + 0^2 = 0 \end{aligned}$$

z twierdzenia o arytmetyce granic dla ciągów.

Typowy błąd

Typowy błąd

Chcemy obliczyć $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Niemniej, obliczenie

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

nie pozwala stwierdzić, że $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0$. To jest zasadniczy błąd, ponieważ ciąg $(1/n/1/n)$ nie był dowolnym ciągiem dążącym do $(0,0)$.

Nieistnienie granicy

Aby pokazać, że nie istnieje jakaś granica, jest w pewnym sensie łatwiej, ponieważ wystarczy

1. znaleźć ciąg $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$,
2. znaleźć inny ciąg $(x'_n, y'_n) \to (x_0, y_0)$,
3. oba nie mogą przyjmować wartości (x_0, y_0),
4. ciągi te maja różne granice:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g \neq g' = \lim_{n\to\infty} f(x'_n, y'_n)$$

Przykład

Granica $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ nie istnieje

Bierzemy:

1. ciąg 1: $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$,
2. ciąg 2: $(x_n', y_n') = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \to (0,0)$,
3. $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$
4. $\lim_{n\to\infty} f(x_n', y_n') = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = -\frac{1}{2}$
5. tak więc powyższa granica funkcji nie istnieje

Granice iterowane

Trzeba uważać, aby nie wpaść w pułapkę i nie obliczyć jednej z tzw. granic iterowanych, czyli przejść z granicą najpierw po jednej zmiennej, a potem po drugiej, np.

$$\lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

lub

$$\lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y)$$

ponieważ to nie jest to samo. W granicy podwójnej wymagamy, aby dążyć do (x_0, y_0) w dowolny sposób, a nie po brzegu prostokąta!

Przykład

Granice iterowane funkcji $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ w $(0,0)$

Obie granice iterowane

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2} = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2} = 0$$

istnieją i nawet są równe! Ale wiemy już, że granica podwójna $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ nie istnieje!
Wniosek: granica podwójna to coś więcej niż granice iterowane.

Twierdzenia o 3 funkcjach

Łatwo się domyśleć, że dla funckji dla dwóch zmiennych też zachodzi Twierdzenie o 3 funkcjach. Jeżeli

$$f(x,y) \leqslant g(x,y) \leqslant h(x,y)$$

w pewnym sąsiedztwie punktu (x_0, y_0) oraz

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} h(x,y) = a$$

to

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = a$$

Przykład

Zastosowanie 3f

Mamy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\cos\frac{1}{xy} = 0$$

ponieważ

$$0 \leqslant |(x^2+y^2)\cos\frac{1}{xy}| \leqslant x^2+y^2$$

a obie skrajne funkcje mają granicę w $(0,0)$ równą zeru.

Ciągłość $f(x)$

Pojęcie ciągłości dla funkcji wielu zmiennych jest podobne do ciągłości funkcji jednej zmiennej. Przypomnijmy więc:
Jeżeli f jest zdefiniowana na pewnym otoczeniu $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, to f jest *ciągła w* x_0 jeżeli

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

czyli $f(x)$ dąży do wartości funkcji f w punkcie x_0.

Ciągłość $f(x, y)$

1. Jeżeli f jest zdefiniowane na otoczeniu $\mathcal{O}((x_0, y_0), r)$ punktu (x_0, y_0). Wtedy $f(x, y)$ jest *ciągła w* (x_0, y_0) jeżeli
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$
2. Podobnie definiujemy ciągłość funkcji trzech zmiennych $f(x, y, z)$.
3. Mówimy, że funkcja $f = f(x, y)$ jest *ciagła na zbiorze otwartym* $A \subseteq D_f$, jezeli jest ciągła w każdym $(x_0, y_0) \in A$. Podobnie dla $f(x, y, z)$.

Arytmetyka funkcji ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli f oraz g są ciągłe w (x_0, y_0), to

1. suma $f + g$ jest ciągła w (x_0, y_0),
2. iloczyn $f \cdot g$ jest ciągły w (x_0, y_0),
3. iloraz f/g jest ciągły w x_0 o ile $g(x_0, y_0) \neq 0$.

Arytmetyka funkcji ciągłych

Twierdzenie

Jeżeli f jest ciągła na zbiorze otwartym A, g jest ciągła na zbiorze otwartym B, to

1. suma $f + g$ jest ciągła na zbiorze $A \cap B$,
2. iloczyn $f \cdot g$ jest ciągły na zbiorze $A \cap B$,
3. iloraz f/g jest ciągły na zbiorze
$$A \cap (B \setminus \{(x_0, y_0) : g(x_0, y_0) = 0\}).$$
4. rożnica $f - g$ też jest ciągła na $A \cap B$, ale wynika to z (1) i (2).

Ciągłość złożenia funkcji

Twierdzenie

Jeżeli $f : D_f \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie (x_0, y_0) oraz $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie $z_0 = f(x_0, y_0)$, to funkcja

$$h(x, y) = g(f(x, y))$$

jest ciągła w (x_0, y_0).

Przykład

Funkcja $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ jest ciągła w każdym punkcie $(x_0, y_0) \in D_h = \mathbb{R}^2$ ponieważ jest złożeniem funkcji ciągłych: $f(x, y) = x^2 + y^2$ oraz $g(z) = \sqrt{z}$.

Łatwe przykłady funkcji ciągłych

1. Funkcja
$$f(x, y) = \sin x + \ln y$$
jest ciągła na zbiorze $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.
2. Funkcja
$$f(x, y) = \sin x \cos y$$
jest ciągła na $\mathbb{R}^2$.
3. Funkcja
$$f(x, y) = \frac{\sin x}{e^y - 1}$$
jest ciągła na $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\})$

Przykłady

Nieco trudniejsze przykłady funkcji ciągłych

Wykonując skończona liczbę operacji typu dodawanie, mnożenie, dzielenie, składanie na funkcjach wielomianowych, trygonometrycznych, wykładniczych i odwrotnych do nich otrzymujemy *funkcje elementarne*, które są ciągłe w całej swojej dziedzinie. Stąd następujące przykłady funkcji ciągłych:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + x^2y^3 - 2xy \\
g(x,y) &= \sin\sqrt{x^2 + xy} \\
h(x,y) &= \frac{\arcsin(x^2y)}{xy+1} \\
k(x,y) &= \ln(x^2 + y\sin x)
\end{aligned}
$$

(na swoich dziedzinach).

Przykład

Zbadajmy ciągłość funkcji nieelementarnej

$$\begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & xy \neq 0 \\ 1 & xy = 0 \end{cases}$$

na całej dziedzinie $D_f = \mathbb{R}$.

1. Zauważmy, że jeżeli $x_0 y_0 \neq 0$, to $f(x, y) = \sin(xy)/(xy)$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0), więc f jest ciągła w tym punkcie jako iloraz funkcji ciągłych z niezerowym mianownikiem.
2. Pozostają do zbadania punkty (x_0, y_0) takie że $x_0 y_0 = 0$. Są to obie osie układu współrzędnych.

Przykład (kontynuacja)

Niech $x_0 y_0 = 0$. Badając granicę $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$, możemy podzielić ją na dwa przypadki:

1. $(x,y) \to (x_0,y_0)$ z warunkiem $xy \neq 0$ dla wszystkich x,y:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sin(xy)}{xy} \\ &= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} \\ &= 1 \\ &= f(x_0,y_0) \end{aligned}$$

2. $(x,y) \to (x_0,y_0)$ z warunkiem $xy = 0$ dla wszystkich x,y:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} 1 = 1 = f(x_0,y_0)$$

Wniosek: f jest ciągła na całej swojej dziedzinie.

Przykład

Inny przykład funkcji nieelemetarnej

Znajdziemy wszystkie punkty, w których funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & x > 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} & x \leqslant 0 \end{cases}$$

jest ciągła.

1. Jeżeli $x_0 \neq 0$, wtedy ciągłość w (x_0, y_0) dla każdego y_0 wynika z ciągłości funkcji $(x,y) \to x+y$ oraz funkcji $(x,y) \to \sqrt{x^2+y^2}$ (to funkcja elementarna).
2. Pozostaje do zbadania przypadek gdy $x_0 = 0$.

Przykład

Wystarczy rozważyć dwa przypadki:

1. obliczyć $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ dla (x,y) takich że $x > 0$:
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} (x+y) = 0 + y_0 = y_0.$$
2. obliczyć $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ dla (x,y) takich że $x \leqslant 0$:
$$\lim_{(x,y)\to(0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,y_0)} \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{y_0^2} = |y_0|.$$
3. Mamy ponadto $f(0,y_0) = |y_0|$.
4. Wniosek: warunek na ciągłość: $|y_0| = y_0 = y_0$ zachodzi tylko dla $y_0 \geqslant 0$. Funkcja jest ciągła wszędzie poza ujemną półosią osi y.

Koniec

Dziękuję za uwagę!